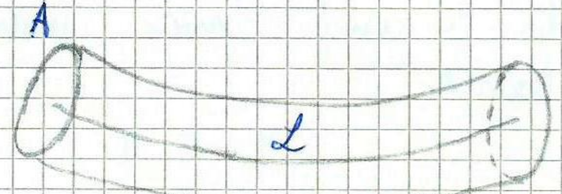
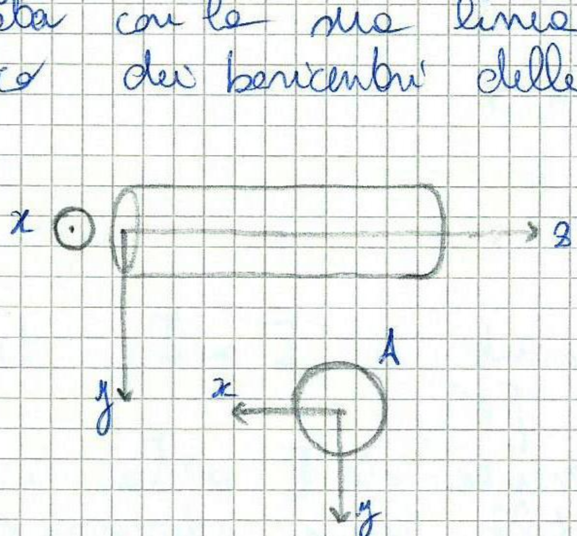
La trave piana

È l'elemento strutturale in cui una dimensione prevale sulle altre due: è la lunghezza. Si ottiene facendo traslare lungo un asse $\mathcal{L}$ (linea d'asse della trave) una figura piana A (sezione trasversale della trave):

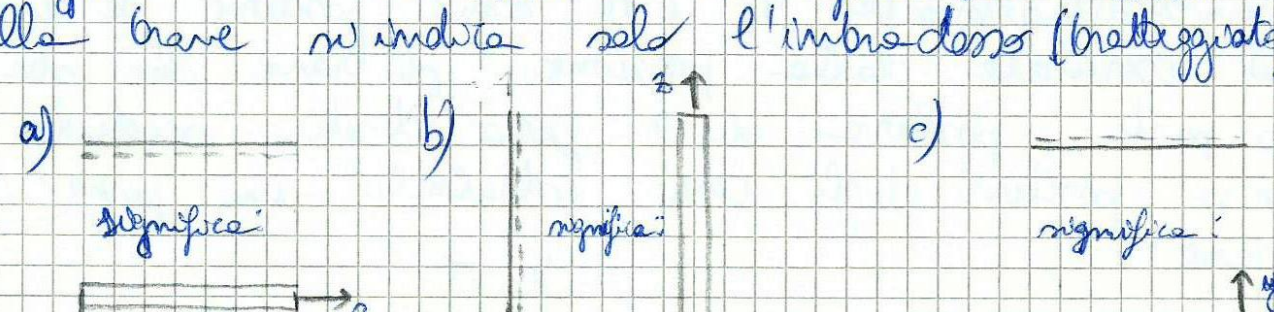


Consideriamo in particolare la trave piana ad asse rettilineo: in tal modo la trave sta su un piano e giace su una retta. La trave viene infine identificata con la sua linea d'asse, cioè il luogo geometrico dei baricentri delle sezioni trasversali.



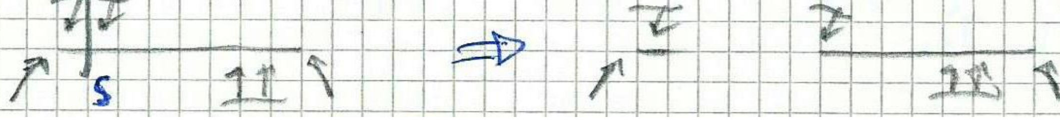
Il sistema di riferimento locale della trave è così definito:
- z lungo l'asse;
- y verso il basso;
- x uscente dal piano.

L'intradosso è il lembo inferiore della trave. Anziché disegnare tutto il sistema di riferimento associato alla trave si indica solo l'intradosso (tratteggiato):

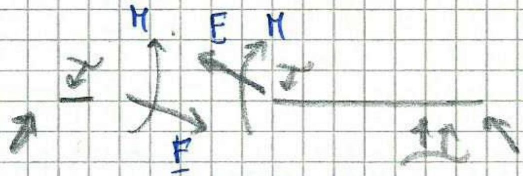


Le caratteristiche di sollecitazione

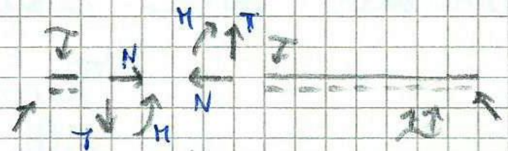
Immaginiamo ora che la trave sia soggetta a un sistema di forze e sia all'equilibrio. Eseguiamo una sezione che divide in due parti la trave:



Ora non sappiamo più se le due porzioni siano ancora in equilibrio. Dobbiamo assumere che ci siano forze interne che mantengano l'equilibrio, cioè sfruttare il postulato di Eulero: "Le azioni mutue interne che le due porzioni di trave si scambiano sono equivalenti a una forza risultante e a un momento risultante".

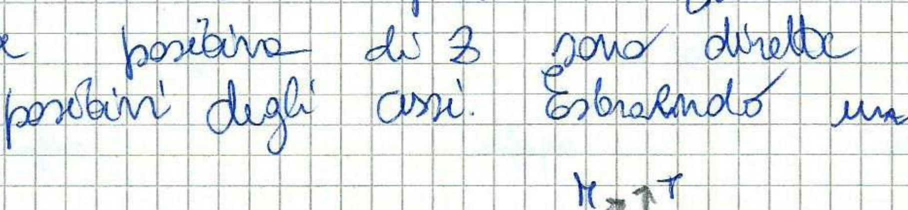


Si definiscono caratteristiche di sollecitazione le componenti delle azioni interne nel sistema di riferimento locale della trave:



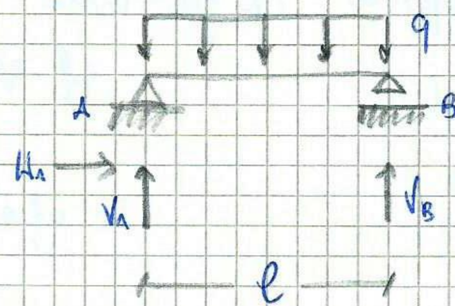
Si dicono:
- N: sforzo normale, componente di F nella direzione dell'asse della trave z, [F];
- T: sforzo di taglio, componente di F nella direzione perpendicolare all'asse della trave, direzione y, [F];
- M: momento flettente [F·L].

Convenzionalmente N, T e M sono positive se le azioni esercitate dalla porzione di trave che sta dalla parte positiva di z sono dirette secondo i versi positivi degli assi. Estraendo un pezzo di trave:



Ne segue che N è positiva quando tende la trave (← →), T è positivo quando la fa ruotare in senso orario (↑ ↓), M è positivo quando tende l'intradosso (↶ ↷).

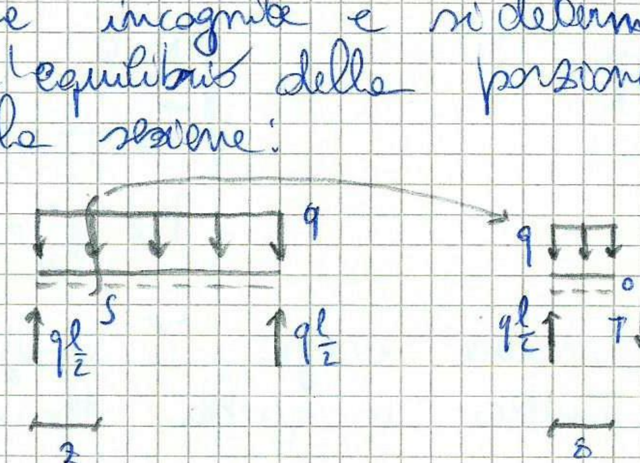
Vediamo l'equilibrio della trave appoggiata, caso base isostatico:



Reazioni vincolari:

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A + V_B - ql = 0 \\ V_B l - q\frac{l^2}{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} H_A = 0 \\ V_B = q\frac{l}{2} \\ V_A = q\frac{l}{2} \end{cases}$$

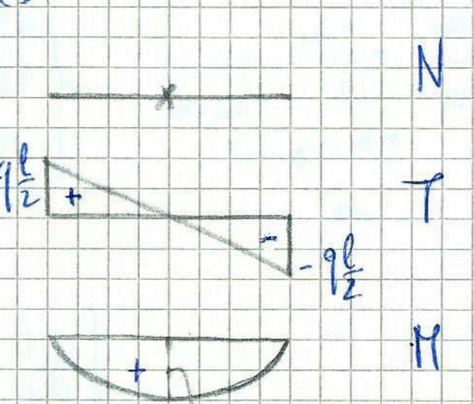
Un primo metodo per ottenere l'equilibrio è concentrarsi su una porzione di trave, tagliando la trave con una sezione. Si indicano le caratteristiche di sollecitazione incognite e si determinano N, T e M imponendo l'equilibrio della porzione di trave individuata dalla sezione:



$$\begin{cases} N = 0 \\ q\frac{l}{2} - qz - T = 0 \\ M + q\frac{z^2}{2} - q\frac{l}{2}z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = 0 \\ T = -qz + q\frac{l}{2} \\ M = q\frac{l}{2}z - q\frac{z^2}{2} \end{cases}$$

Possiamo tracciare i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione per ottenere graficamente l'andamento di N, T, M:

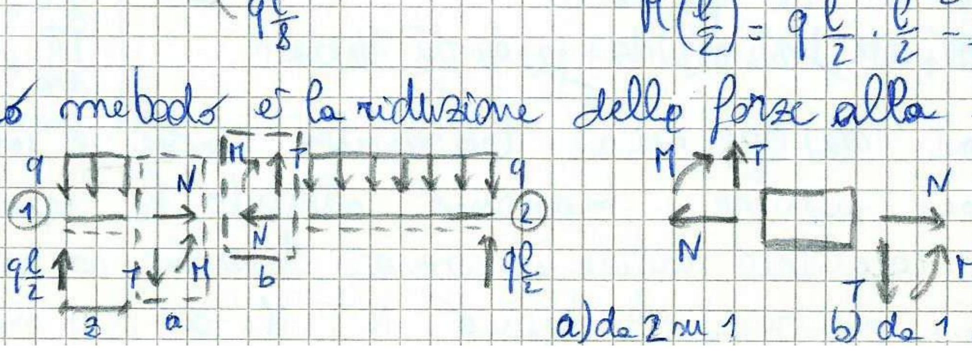


$N > 0$ e $T > 0$ sopra la trave
$M > 0$ sotto la trave

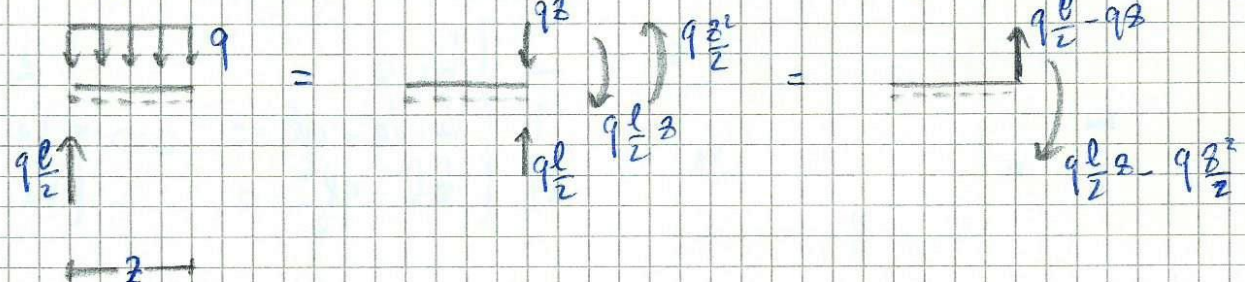
Si ha M_{max} dove $\frac{dM}{dz} = 0$

Quindi, se $\frac{dM}{dz} = q\frac{l}{2} - qz = 0$ otteniamo $z = \frac{l}{2}$, da cui $M\left(\frac{l}{2}\right) = q\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2} - \frac{q}{2}\cdot\frac{l^2}{4} = q\frac{l^2}{8}$

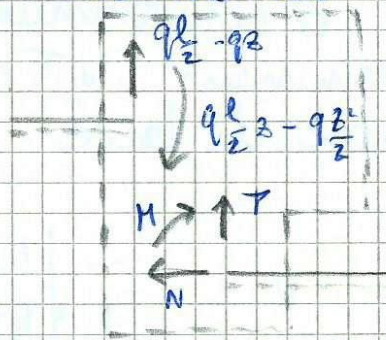
Un altro metodo è la riduzione delle forze alla sezione:



Concentriamoci sulla sezione S e sulla porzione (1). Portiamo tutti i carichi all'estremità destra della porzione (1) e vediamo quali momenti di trasporto si generano:



Confrontiamo i carichi ottenuti con le caratteristiche di sollecitazione all'estremità sinistra della porzione (2):

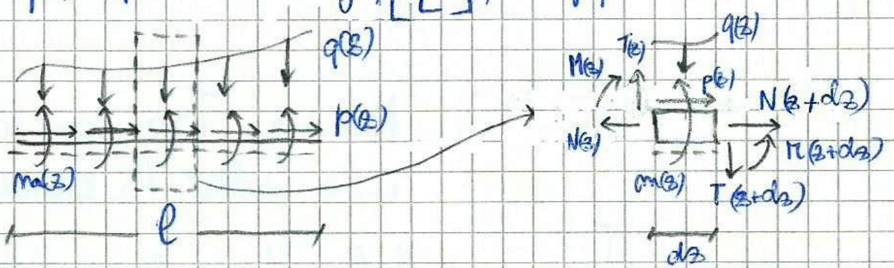


$$\begin{cases} N = 0 \\ T = q\frac{l}{2} - qz \\ M = q\frac{l}{2}z - q\frac{z^2}{2} \end{cases}$$

Non abbiamo dovuto cambiare i segni. I diagrammi grafici sono ovviamente identici a quelli ottenuti prima.

Le equazioni indefinite di equilibrio

Consideriamo la trave seguente, soggetta a carico distribuito assiale $p(z)$ parallelo a z, $\left[\frac{F}{L}\right]$, carico distribuito trasversale $q(z)$ parallelo a y, $\left[\frac{F}{L}\right]$, coppie distribuite $m(z)$, $\left[\frac{FL}{L}\right]$:



$$\begin{cases} N(z+dz) = N(z) + dN \\ T(z+dz) = T(z) + dT \\ M(z+dz) = M(z) + dM \end{cases}$$

Imponiamo l'equilibrio

$$\begin{cases} \cancel{N(z)} + dN - \cancel{N(z)} + p(z)\cdot dz = 0 \\ -T(z) - dT + T(z) - q(z)\cdot dz = 0 \\ \cancel{M(z)} + dM - \cancel{M(z)} + m(z)\,dz + \underbrace{q(z)\,dz\,\frac{dz}{2}}_{=0} - T(z)\,dz = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{dN}{dz} + p(z) = 0 \\ \frac{dT}{dz} + q(z) = 0 \\ \frac{dM}{dz} + m(z) = T(z) \end{cases}$$

Il termine $q(z)\frac{dz^2}{2}$ viene trascurato poiché è infinitesimo di ordine superiore. Abbiamo ottenuto le equazioni indefinite di equilibrio valide in assenza di carichi concentrati (discontinuità di carico), che legano N, T, M a p, q, m.

Il problema è differenziale quindi servono tre condizioni note al contorno per risolvere le tre equazioni in tre incognite (N, T, M). Localmente l'equilibrio della trave è determinato staticamente. Si usano le condizioni al contorno $N(0), T(0), M(0)$, alle estremità.

Facciamo alcune considerazioni sulle equazioni indefinite di equilibrio. Possiamo infatti usarle per tracciare i diagrammi di N, T, M:

1) $\frac{dN}{dz} = -p(z)$: a) $p(z)=0 \Rightarrow \frac{dN}{dz}=0 \Rightarrow$ punto di stazionarietà in N

$p(z)>0 \Rightarrow \frac{dN}{dz}<0 \Rightarrow$ N decrescente

$p(z)<0 \Rightarrow \frac{dN}{dz}>0 \Rightarrow$ N crescente

b) $p(z)=0$ su una porzione di trave

$\Rightarrow \frac{dN}{dz}=0 \Rightarrow N=\text{cost}$

$p(z)=\text{cost}$ su una porzione di trave

$\Rightarrow \frac{dN}{dz}=\text{cost} \Rightarrow$ N lineare

$p(z)$ lineare su una porzione di trave

$\Rightarrow \frac{dN}{dz}$ lineare $\Rightarrow$ N parabolico

2) $\frac{dT}{dz} = -q(z)$: a) $q(z)=0 \Rightarrow \frac{dT}{dz}=0 \Rightarrow$ punto di stazionarietà in T

$q(z)\ 0 \Rightarrow \frac{dT}{dz}<0 \Rightarrow$ T decrescente

$q(z)<0 \Rightarrow \frac{dT}{dz}>0 \Rightarrow$ T crescente

b) $q(z)=0$ su una porzione di trave

$\Rightarrow \frac{dT}{dz}=0 \Rightarrow T=\text{cost}$

$q(z)=\text{cost}$ su una porzione di trave

$\Rightarrow \frac{dT}{dz}=\text{cost} \Rightarrow$ T lineare

$q(z)$ lineare su una porzione di trave

$\Rightarrow \frac{dT}{dz}$ lineare $\Rightarrow$ T parabolico

3) $\frac{dM}{dz} = T(z)$ con $m(z)=0$: a) $T(z)=0 \Rightarrow \frac{dM}{dz}=0 \Rightarrow$ punto di stazionarietà in M

$T(z)>0 \Rightarrow \frac{dM}{dz}>0 \Rightarrow$ M crescente

$T(z)<0 \Rightarrow \frac{dM}{dz}<0 \Rightarrow$ M decrescente

b) $T(z)=0$ su una porzione di trave

$\Rightarrow \frac{dM}{dz}=0 \Rightarrow M=cost$

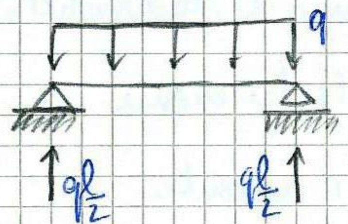
$T(z)=cost$ su una porzione di trave

$\Rightarrow \frac{dM}{dz}=cost \Rightarrow M$ lineare

$T(z)$ lineare su una porzione di trave

$\Rightarrow \frac{dM}{dz}$ lineare $\Rightarrow M$ parabolico

Torniamo all'esempio della trave appoggiata:



$p(z)=0 \Rightarrow N=cost$

$q(z)=cost \Rightarrow T$ lineare $\Rightarrow M$ parabolico

$T=0$ in $z=\frac{l}{2} \Rightarrow \frac{dM}{dz}=0$ in $z=\frac{l}{2}$ (max)

$0<z<\frac{l}{2}$ $T>0$ $\Rightarrow M$ crescente

$\frac{l}{2}<z<l$ $T<0$ $\Rightarrow M$ decrescente